SRETEN B. STOJANOVIĆ[1]
DRAGUTIN LJ. DEBELJKOVIĆ[2]
ILIJA MLADENOVIĆ[1]

[1]Tehnološki fakultet, Univerzitet u Nišu Leskovac

[2]Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd

NAUČNI RAD

512.763:66.022.362:519.6

ASIMPTOTSKA STABILNOST LINEARNIH DISKRETNIH SISTEMA SA KAŠNJENJEM: LJAPUNOV PRILAZ

U radu su dati novi kriterijumi asimptotske stabilnosti sledeće klase linearnih diskretnih sistema sa kašnjenjem: $x(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-h)$. Ovi kriterijumi su nezavisni od kašnjenja i dati su u obliku dovoljnih uslova stabilnosti. Dobijeni su korišćenjem druge Ljapunove metode i manje su konzervativni u poređenju sa nekim postojećim kriterijumima stabilnosti. Radi ilustracije dobijenih rezultata prezentovan je numerički primer.

U industrijskim procesima se, pri prenosu informacija ili materije između različitih delova sistema, često javlja vremensko kašnjenje. Hemijski procesni sistemi, transportni sistemi, komunikacioni sistemi i termoenergetski sistemi su tipični primeri sistema sa kašnjenjem. Interesovanje za dinamičko ponašanje sistema sa kašnjenjem okupira pažnju velikog broja autora već više od pola veka zbog činjenice da prisustvo vremenskog kašnjenja u sistemu veoma često dovodi do ozbiljnih pogoršanja u njegovim performansama i stabilnosti. Međutim, sa sigurnošću se može reći da je to interesovanje bilo u daleko većoj meri zastupljeno kada su u pitanju bili kontinualni a daleko manje kada je bila reč o vremenski diskretnim sistemima sa kašnjenjem. Jedan od glavnih razloga za to je što su diskretni sistemi sa kašnjenjem konačne dimenzije, pa se kao takvi mogu iskazati preko odgovarajućeg ekvivalentnog sistema bez kašnjenja. Red ovog sistema srazmeran je proizvodu vrednosti kašnjenja i reda matrica sistema. Pri velikim iznosima čisto vremenskog kašnjenja, red ekvivalentnog sistema postaje izuzetno veliki, pa je to u prošlosti, stvaralo znatne matematičke poteškoće.

U tom smislu osnovni doprinosi u ovom radu išli su u pravcu da se ovaj problem prevaziđe analizirajući osobine vremenski diskretnog sistema sa kašnjenjem na polaznim matricama sistema i bez nužnih prevođenja istog na ekvivalentni sistem.

Prvi značajniji rad, koji se bavio problematikom asimptotske stabilnosti ove klase sistema pojavio se tek 1982. godine [1]. U ovom radu dati su jednostavni dovoljni uslovi stabilnosti zasnovani na korišćenju normi matrica i njihovih funkcija. U radu [2] razmatrana je asimptotska i D–stabilnost diskretnih sistema sa kašnjenjem i predloženi su dovoljni uslovi koji su manje konzervativni od [1]. U poslednjih desetak godina problem stabilnosti neodređenih sistema sa kašnjenjem postao je jako popularan među istraživačima. Samo mali broj radova bavio se na ovu temu neodređenim diskretnim sistemima sa kašnjenjem [3–10].

Posebnu klasu sistema sa kašnjenjem čine veliki (large–scale) dinamički sistemi sa kašnjenjem, koji su okarakterisani velikim brojem promenljivih stanja i kompleksnih interakcija između podsistema. U skorije vreme, problem stabilnosti ove klase sistema razmatran je u radovima [11–19].

U ovom radu izvedeni su novi dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti za linearne diskretne sisteme sa kašnjenjem. Pokazano je da ovi uslovi daju bolje rezultate od uslova datih u [1] a vrlo slične rezultate sa uslovima iz [2]. Međutim, za razliku od [1] i [2], gde su kriterijumi stabilnosti izvedeni u kompleksnom domenu, ovde su oni izvedeni u vremenskom domeni koristeći drugu metodu Ljapunova.

OZNAKE I PRELIMINARNA RAZMATRANJA

$\Re$	– Realni vektorski prostor
F^T	– Transponovanje matrice
$F > 0$	– Pozitivno definitna matrica
$F \geq 0$	– Pozitivno semidefinitna matrica
$\lambda(F)$	– Sopstvena vrednost matrice
$\rho(F)$	– Spektralni radijus matrice
$\sigma(F)$	– Singularna vrednost matrice
$\|F\|$	– Euklidska norma matrice

Posmatrajmo linearan, autonomni, vremenski diskretni sistem sa kašnjenjem, opisan sledećom diferencnom jednačinom:

$$x(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-h) \tag{1}$$

gde su: $x(k) \in \Re^n$, $A_j \in \Re^{n\times n}$, a h ceo broj koji predstavlja vremensko kašnjenje.

Lema 1. Spektralni radijus matrice A biće manji od α, $0 < \alpha < 1$, ako i samo ako za proizvoljnu pozitivno određenu realnu simetričnu n x n matricu Q postoji pozitivno određena realna simetrična n x n matrica P koja je

Rad je saopšten na Skupu "Savremene tehnologije i privredni razvoj", Leskovac, oktobar 21–22, 2005.

Adresa autora: S. Stojanović, Tehnološki fakultet, Univerzitet u Nišu, 16000 Leskovac, E–mail: ssreten@ptt.yu
Rad primljen: Septembar 20, 2005
Rad prihvaćen: Mart 23, 2006

jedinstveno rešenje sledeće diskretne Ljapunove matrične jednačine

$$\alpha^{-2} A^T PA^T - P = -Q \tag{2}$$

Dokaz. Neka je $\hat{A} = \alpha^{-1}A$. Tada (2) postaje

$$\hat{A}^T P \hat{A}^T - P = -Q \tag{3}$$

pa je matrica $\hat{A}$ diskretno stabilna ako i samo ako za datu matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ kao rešenje matrične jed. (3). Odavde sledi $1 > \rho(\hat{A}) = \rho(\alpha^{-1}A) = \alpha^{-1}\rho(A)$. Dakle, $\rho(A) < \alpha$.

GLAVNI REZULTATI

Teorema 1. Ako za svaku simetričnu pozitivno definitnu matricu $Q = Q^T > 0$ postoji simetrična pozitivno definitna matrica $P = P^T > 0$ kao rešenje sledeće matrične jednačine

$$2A_0^T PA_0 + 2A_1^T PA_1 - P = -Q \tag{4}$$

onda je sistem (1) asimptotski stabilan.

Dokaz. Usvojimo sledeću Ljapunovu funkciju

$$V(x_k) = x^T(k)\, Px(k) + \sum_{j=1}^{h} x^T(k-j)\, Sx(k-j) \tag{5}$$

$$P = P^T > 0, \quad S = S^T > 0$$

Potonja razlika ove funkcije duž trajektorije sistema (1) je:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) &= x^T(k)\,(A_0^T PA_0 - P + S)\,x(k) + \\ &+ x^T(k-h)\,(A_1^T PA_1 - S)\,x(k-h) + \\ &+ x^T(k)\,A_0^T PA_1\,x(k-h) + x^T(k-h)\,A_1^T PA_0\,x(k) \end{aligned} \tag{6}$$

Ukoliko za matricu S usvojimo vrednost

$$S = 2A_1^T PA_1 \tag{7}$$

onda je

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) &= x^T(k)\,(2A_0^T PA_0 + 2A_1^T PA_1 - P)\,x(k) \\ &- x^T(k-h)\,A_1^T PA_1\,x(k-h) \\ &+ x^T(k)\,A_0^T PA_1\,x(k-h) + x^T(k-h)\,A_1^T PA_0\,x(k) \\ &- x^T(k)\,A_0^T PA_0\,x(k) + x^T(k)\,A_0^T PA_0\,x(k) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) &= x^T(k)\,(2A_0^T PA_0 + 2A_1^T PA_1 - P)\,x(k) \\ &- [A_0x(k) - A_1x(k-h)]^T P[A_0x(k) - A_1x(k-h)] \end{aligned} \tag{9}$$

Očigledno je

$$\Delta V(x_k) \le x^T(k)\,(2A_0^T PA_0 + 2A_1^T PA_1 - P)\,x(k) \tag{10}$$

Prema tome, ako za svaku matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ kao rešenje matrične jed. (4), onda važi

$$V(x_k) > 0, \quad \Delta V(x_k) < 0, \quad \forall x_k \ne 0 \tag{11}$$

pa je sistem (1) asimptotski stabilan.

Lema 2. Ako za svaku simetričnu pozitivno definitnu matricu $Q = Q^T > 0$ postoji simetrična pozitivno definitna matrica $P = P^T > 0$ kao rešenje sledeće matrične jednačine

$$A_0^T PA_0 - P = -Q \tag{12}$$

onda je matrica $2Q - P$ pozitivno definitna ako i samo ako je zadovoljen uslov

$$\rho(A_0) < \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je matrica $2Q - P$ pozitivno definitna, što je ekvivalentno $P - 2Q < 0$. Na osnovu (12) važi

$$0 > P - 2Q = P + 2(A_0^T PA_0 - P) = 2A_0^T PA_0 - P \tag{14}$$

tj.

$$2A_0^T PA_0 - P = -R < 0 \tag{15}$$

gde je $R = R^T > 0$ bilo koja simetrična pozitivno definitna matrica. Poslednja nejednakost će biti ispunjena ako i samo ako je zadovoljen uslov (13) (Lema 2). Između koraka u ovom dokazu važi relacija ekvivalencije, pa važi i obrnuto tvrđenje: ukoliko je zadovoljen uslov (13) onda je matrica $2Q - P$ pozitivno definitna.

Primedba 1. Uslov (13) garantuje diskretnu stabilnost matrice A_0.

Posledica 1. Sistem (1) asimptotski je stabilan ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\rho(A_0) < \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{16}$$

$$\|A_1\|_2^2 < \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_{min}(2Q - P)}{\lambda_{max}(P)} \tag{17}$$

gde je matrica $P = P^T > 0$ pozitivno definitno rešenje matrične jednačine (12) za proizvoljno izabranu pozitivno definitnu matricu $Q = Q^T > 0$.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1, sistem (1) je asimptotski stabilan ukoliko važi:

$$2A_0^T PA_0 + 2A_1^T PA_1 - P < 0 \tag{18}$$

Ovaj uslov se može razložiti na sledeća dva uslova:

1. Za datu matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ kao rešenje diskretne Ljapunove jednačine (12),

2. Matrice P i Q zadovoljavaju sledeći uslov

$$2A_1^T PA_1 - (2Q - P) < 0 \tag{19}$$

Prvi uslov zahteva da matrica A_0 bude diskretno stabilna, a uslov (19) zahteva da matrica $2Q - P$ bude pozitivno definitna. Na osnovu Leme 2 to će biti ispunjeno ako je zadovoljen uslov (16).

Uslov (19) ekvivalentan je sledećem uslovu

$$\lambda_i\,[2A_1^T PA_1 - (2Q - P)] < 0, \quad 1 \le i \le n \tag{20}$$

Pošto su sve matrice u poslednjoj nejednakosti realne i simetrične, koristeći Weyllovu nejednakost, sledi da je:

$$\lambda_i(2A_1^T PA_1 + P - 2Q) \le \lambda_{max}(2A_1^T PA_1 + P - 2Q) \le$$
$$\le \lambda_{max}(2A_1^T PA_1) - \lambda_{min}(2Q - P)$$
$$= 2\lambda_{max}(A_1^T P^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} A_1) - \lambda_{min}(2Q-P) =$$
$$= 2\lambda_{max}\left[\left(P^{\frac{1}{2}}A_1\right)^T P^{\frac{1}{2}}A_1\right] - \lambda_{min}(2Q-P)$$
$$= 2\sigma^2_{max}(P^{\frac{1}{2}}A_1) - \lambda_{min}(2Q-P) \le$$
$$\le 2\sigma^2_{max}(A_1)\,\sigma^2_{max}(P^{\frac{1}{2}}) - \lambda_{min}(2Q-P)$$
$$= 2\sigma^2_{max}(A_1)\,\lambda_{max}(P) - \lambda_{min}(2Q-P) \quad (21)$$

Prema tome, ukoliko je uslov

$$2\sigma^2_{max}(A_1)\,\lambda_{max}(P) - \lambda_{min}(2Q-P) < 0 \quad (22)$$

zadovoljen, onda je sistem (1) asimptotski stabilan. S obzirom da je $\sigma^2_{max}(A_1) = \|A_1\|_2^2$, iz (22) konačno sledi uslov (17).

Primedba 2. Ukoliko uslov (16) nije zadovoljen, Posledica 1 ne može se koristiti za ispitivanje stabilnosti sistema (1).

Posledica 2. Sistem (1) asimptotski je stabilan ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\|A_1\|_2^2 < \frac{1}{2}\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)} \quad (23)$$

gde je matrica $P = P^T > 0$ pozitivno definitno rešenje sledeće matrične jednačine

$$2A_0^T PA_0 - P = -Q \quad (24)$$

za proizvoljno izabranu pozitivno definitnu matricu $Q = Q^T > 0$.

Dokaz. Sledeći ideju u dokazu Posledice 1, nejednakost (18) može se razdvojiti na sledeća dva uslova:

1. Za svaku simetričnu pozitivno definitnu matricu $Q = Q^T > 0$ postoji simetrična pozitivno definitna matrica $P = P^T > 0$ kao rešenje matrične jednačine (24),
2. Matrice P i Q zadovoljavaju sledeću nejednakost

$$2A_1^T PA_1 - Q < 0 \quad (25)$$

Slično dokazu Posledice 1, pokazuje se da ako je zadovoljen uslov (23), onda je sistem (1) asimptotski stabilan.

Primedba 3. Ukoliko uslov $A_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, koji je ekvivalentan uslovu rešivosti matrične jednačine (24), nije ispunjen, onda se Posledica 2 se ne može koristiti za ispitivanje stabilnosti sistema.

NUMERIČKI PRIMERI

Primer 1. Razmatra se sledeći diskretni sistem sa kašnjenjem:

$$x(k+1) = A_0 x(k) + \gamma A_1 x(k-h).$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

gde je γ jedini podesivi parametar, a skalarni parametar α uzima diskretne vrednosti –0,15 i 0,50.

Tabela 1. Uslovi asimptotske stabilnosti sistema u funkciji parametra γ

Table 1. Conditions of the asymptotic stability of the system as a function of the parameter γ

α		–0,15	+0,50
[1], Mori (1982)	$\sum_{j=0}^{N} \|A_j\|_2 < 1$	$\|\gamma\| < 1,73$	$\|\gamma\| < 0,72$
[2], Trinh, Alden (1995)	$\rho\left(L\sum_{j=1}^{N} \|A_j\|\right) < 1$	$\|\gamma\| < 2,08$	$\|\gamma\| < 1,51$
Teorema 1	$2A_0^T PA_0 + 2A_1^T PA_1 - P = -Q$	$\|\gamma\| < 1,95$	$\|\gamma\| < 1,47$
Posledica 1	$A_0^T PA_0 - P = -Q$ $\|A_1\|_2^2 < \frac{1}{2}\frac{\lambda_{min}(2Q-P)}{\lambda_{max}(P)}$ $\rho(A_0) < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\|\gamma\| < 1,68$	$\|\gamma\| < 1,01$
Posledica 2	$2A_0^T PA_0 - P = -Q$ $\|A_1\|_2^2 < \frac{1}{2}\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)}$	$\|\gamma\| < 1,70$	$\|\gamma\| < 1,06$
Granica stabilnosti		$\|\gamma\| < 2,11$	$\|\gamma\| < 1,52$

Primenom Teoreme 1, i Posledica 1 i 2 dobijeni su uslovi asimptotske stabilnosti posmatranog sistema u funkciji parametra γ i isti su prikazani u tabeli 1. Za matricu Q usvojena je jedinična matrica drugog reda.

Iz tabele 1 se vidi da kriterijum definisan Teoremom 1 daje približno isti rezultat kao i kriterijum stabilnosti prezentovan u [2]. Za posmatrani sistem izračunata je i gornja granica parametra γ pri kojoj se sistem nalazi na granici stabilnosti, i to za različite vrednosti parametra α. Poređenjem ovih vrednosti sa vrednostima za parametar γ dobijenim primenom Teoreme 1, zaključujemo da ova teorema daje dobre rezultate.

Kao posledica razbijanja uslova stabilnosti Teoreme 1 na dva uslova, Posledice 1 i 2 daju nešto slabije rezultate. Najslabije rezultate pokazuje uslov definisan u [1].

ZAKLJUČAK

U radu su prezentovani novi dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti u vidu kriterijuma koji su nezavisni od kašnjenja. Pokazano je da dati uslovi poseduju manju konzervativnost od nekih uslova iz postojeće literature.

LITERATURA

[1] Mori, T., N. Fukuma and M. Kuwahara, "Delay–independent stability criteria for discrete–delay systems," IEEE Trans. Automat. Contr., 27, No. **4** (1982) 946–966.

[2] Trinh, H. and M. Aldeen, "D – Stability Analysis of Discrete–Delay Perturbed Systems," Int. J. Control, 61, No. **2** (1995) 493–505.

[3] E. Verriest, A. Ivanov, Robust stability of delay–difference equations, Proc. IEEEE Conf. on Dec. and Control, New Orleans, LA (1995) 386–391.

[4] V. Kapila, W. Haddad, Memoryless H_∞ controllers for discrete–time systems with time delay, Automatica **34** (1998) 1141–1144.

[5] S. Song, J. Kim, C. Yim, H. Kim, H_∞ control of discrete–time linear systems with time–varying delays in state, Automatica **35** (1999) 1587–1591.

[6] M.S. Mahmoud, Robust H_∞ control of discrete systems with uncertain parameters and unknown delays, Automatica **36** (2000) 627–635.

[7] Y.S. Lee, W.H. Kwon, Delay–dependent robust stabilization of uncertain discrete–time state–delayed systems, In: Proc. 15 IFAC Congress Automation and Control (2002) Barcelona.

[8] E. Fridman, U. Shaked, Delay–Dependent H_∞ Control of Uncertain Discrete Delay Systems, European Journal of Control **11** (2005) 29–37.

[9] H. Gao, J. Lam, C. Wang and Y. Wang, Delay–dependent output–feedback stabilization of discrete–time systems with time–varying state delay, IEE Proc.–Control Theory App., Vol. 151, No. **6** (2004) 691–698.

[10] P. Shi, R.K. Agarwal, E.–K. Boukas, S.–P. Shue, Robust H_∞ state feedback control of discrete time–delay linear systems with norm–bounded uncertainty, Internat. J. Systems Sci., **31** (2000) 409–415.

[11] T.N. Lee and U.L. Radovic, "General decentralized stabilization of large–scale linear continuous and discrete time–delay systems", Int. J. Contr. vol. 46, No. **6** (1987) 2127–2140.

[12] T.N. Lee and U.L. Radovic, "Decentralized stabilization of linear continuous and discrete time–delay systems with delays in interconnections", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC–33 (1988) 757–761.

[13] Z. Hu, "Decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC–39 (1994) 180–182.

[14] H. Trinh and M. Alden, "A comment on 'Decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC–40 (1995) 914–916.

[15] B. Xu, "On delay–Independent and Stability of Large–Scale Systems with Time Delays", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC–40 (1995) 930–933.

[16] S. Huang, H. Shao and Z. Zhang, "Stability analysis of large–scale system with delays", Systems & Control Letters, vol. **25** (1995) 75–78.

[17] C. Lee and T. Hsien, "Delay–independent Stability Criteria for Discrete uncertain Large–scale Systems with Time Delays", J. Franklin Inst., vol. 334B, No. **1** (1997) 155–166.

[18] W.J. Wang and G.L. Mau, "Stabilization and Estimation for Perturbed Discrete Time–Delay Large–Scale Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 42, No. **9** (Sept. 1997) 1277–1282.

[19] J. Park, "Robust Decentralized Stabilization of Uncertain Large–Scale Discrete–Time Systems with Delays", J. Optim. Theory Applic., vol. 113, No. **1** (2002) 105–119.

SUMMARY

ON THE ASYMPTOTIC STABILITY OF LINEAR DISCRETE TIME–DELAY SYSTEMS: THE LYAPUNOV APPROACH

(Scientific paper)

Sreten B. Stojanović[1], Dragutin Lj. Debeljković[2], Ilija Mladenović[1]
[1]Faculty of Technology, University of Niš, Leskovac, [2]Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, Belgrade

New conditions for the stability of discrete delay systems of the form $x(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-h)$ are presented in the paper. These new, delay–independent conditions were derived using an approach based on the second Lyapunov's method. These results are less conservative than some in the existing literature. A numerical example was worked out to show the applicability of the derived results.

Key words: Linear discrete time–delay systems • Asymptotic stability • Sufficient delay–independent conditions •

Ključne reči: Asimptotska stabilnost • Diskretni sistemi • Vremensko kašnjenje • Sistemi sa kašnjenjem • Ljapunova stabilnost •